

Dorin Andrica
Eugen Jecan

Ioan Bogdan
Dumitru Vălcan

Probleme calitative în matematica de gimnaziu

- ediția a II-a, revizuită și completată -

Aritmetică și algebră

- pentru examenele de admitere și capacitate
- pentru concursurile școlare

Editura GIL, Zalău
1998

I Enunțuri	3
1. Probleme de aritmetică	4
2. Mulțimi	11
3. Mulțimile N, Z, Q	21
3.1 Proprietăți generale ale numerelor	21
3.2 Numere prime, numere prime între ele	28
3.3 Divizibilitate în N și Z	31
3.4 Pătrate perfecte, cuburi perfecte.	39
3.5 Numere raționale. Rapoarte și proporții.	44
4. Mulțimea numerelor reale	56
4.1 Numere iraționale	56
4.2 Puteri și radicali	58
4.3 Calcule cu expresii algebrice	72
5. Ecuații și sisteme de ecuații	80
6. Inecuații și sisteme de inecuații	93
7. Funcții	99
8. Polinoame și fracții algebrice	108
9. Inegalități	124
II Soluții	130
1. Probleme de aritmetică	131
2. Mulțimi	147
3. Mulțimile N, Z, Q	159
3.1 Proprietăți generale ale numerelor	159
3.2 Numere prime, numere prime între ele	172
3.3 Divizibilitate în N și Z	178
3.4 Pătrate perfecte, cuburi perfecte.	193
3.5 Numere raționale. Rapoarte și proporții.	202

4. Mulțimea numerelor reale,	215
4.1 Numere iraționale.	215
4.2 Puteri și radicali	219
4.3 Calcule cu expresii algebrice	234
5. Ecuații și sisteme de ecuații	246
6. Inecuații și sisteme de inecuații	263
7. Funcții	270
8. Polinoame și fracții algebrice	282
9. Inegalități	298
Bibliografie	310
Index de autori	311

LBRIS

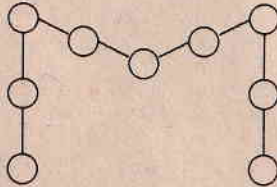
We know
books

Partea I
Enunțuri

1. Probleme de aritmetică

1. Folosind numai patru cifre de 4 și o parte din semnele $+$, $-$, \cdot , $:$, $()$, să se compună exerciții a căror rezultate să fie, pe rând, toate numerele naturale de la 0 la 10.

2. Scrieți cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 în cele nouă ceruculețe din desen, astfel încât suma cifrelor de pe fiecare din cele patru laturi ale literei M să fie 13.



3. Să se reconstituie:

$$a) \begin{array}{r} \star\star\star+ \\ \star\star \\ \star \\ \hline \star\star\star \end{array} \quad b) \begin{array}{r} \star\star\star- \\ \star\star\star \\ \hline \star\star\star \end{array}$$

steluțele fiind cifre distincte și diferite de zero.

4. Să se reconstituie:

$$a) \begin{array}{r} 3A \\ 3B \\ \hline CCC \\ DDD \\ \hline \star 3 3 \star \end{array} \quad b) \begin{array}{r} \star 2\star : \star = \star\star \\ \hline = \star\star \\ \star\star \\ \hline \equiv \equiv \end{array}$$

5. Suma a două numere este 1991. Să se afle numerele știind că unul este cu 1001 mai mare decât celălalt.

6. Diferența a două numere este 180, iar prin împărțirea unuia la celălalt, obținem câtul 3 și restul 34. Să se afle numerele.

7. Media aritmetică a două numere este 45678, iar diferența lor 87654. Să se afle numerele.

8. Un elev nu are 500 lei. Dacă ar avea de 9 ori mai mulți decât are, atunci ar depăși suma de 500 de lei cu tot atâția câți îi lipsesc (până la 500 lei). Câți lei are elevul?

9. Un băiat are acum 4 ani, iar tatăl său are 28 ani. Peste câți ani tatăl va avea vârsta de două ori mai mare decât băiatul?

10. Tatăl are cu 24 ani mai mult decât fiul și jumătate din vârsta bunicului. Știind că împreună au 136 ani, să se afle vârsta fiecăruia.

11. În clasele a V-a A și a V-a B ale unei școli sunt 64 elevi. Dacă s-ar muta 3 elevi din prima clasă în cealaltă, atunci prima ar avea cu 2 elevi mai mult decât a doua. Câți elevi sunt în fiecare clasă?

12. Suma a trei numere este 2984. Să se afle numerele știind că două sunt egale, iar celălalt este egal cu suma lor.

13. La un meci de handbal, Andrei, Bogdan și Cristian au marcat împreună 33 de goluri. Andrei a marcat de trei ori mai multe goluri decât Bogdan, iar Cristian jumătate din numărul golurilor marcate de Andrei. Câte goluri a marcat fiecare?

14. Vasile are cu 1200 lei mai mult decât Grigore, Grigore are de 4 ori mai puțin decât Ioan, iar Ioan cu 2100 lei mai mult decât Vasile. Ce sumă are fiecare?

15. Suma a trei numere este 270. Dacă din fiecare se scade același număr se obțin 24, 81, 132. Să se afle cele trei numere.

16. Suma a patru numere este 997. Știind că primul este de 4 ori mai mare decât al II-lea, al II-lea cu 4 mai mare decât al III-lea și al III-lea cu 4 mai mic decât al IV-lea, să se afle cele patru numere.

17. Suma a cinci numere naturale consecutive este 9980. Să se afle numerele.

18. Trei copii citesc aceeași carte. Când primul copil a terminat de citit cartea, al doilea citise numai jumătate din carte, iar al treilea un sfert din carte. Știind că în acel moment toți trei citiseră 560 pagini, să se afle câte pagini are cartea și câte pagini a citit fiecare copil.

19. Trei copii au primit un coș cu nuci. Unul din ei a împărțit nucile în trei părți egale și a luat o parte. Al doilea a împărțit nucile rămase în patru părți egale și a luat o parte, iar al treilea a împărțit nucile rămase în cinci părți egale și a luat o parte, rămânând 60 de nuci. Câte nuci au fost în coș?

20. Un călător are de parcurs un drum. În prima zi merge o distanță de 4 ori mai mică decât întreg drumul, a doua zi o distanță de 3 ori mai mică decât mai avea de mers, a treia zi jumătate din cât îi mai rămăsese și a patra zi a parcurs restul de 50 km. Care este lungimea drumului?

21. Un număr de patru cifre se împarte la 2, din cât se scade 18, iar diferenței i se șterge prima cifră 9, obținându-se 80. Să se afle numărul.

22. Am o sumă de bani. Dublez această sumă și iau după aceea 1000 lei. Suma obținută astfel o dublez iarăși și iau din ea 2000 lei. A treia oară, dublez suma rămasă, iau din ea 3000 lei și nu mai rămâne nimic. Care a fost suma la început?

23. Să se afle x știind că: $[(x - 1002) : 2 + 3] \cdot 4 - 5 = 1995$.

24. Ana are de 5 ori mai multe cărți decât Maria, iar Elena de 8 ori mai multe decât Maria. Maria dă toate cărțile fratelui ei, Ana dă o cincime din numărul cărților soriei sale, iar Elena vinde la anticariat o jumătate din cărțile sale. Câte cărți a avut fiecare fetiță, dacă mai au împreună 32 de cărți?

25. În clasa a II-a și a IV-a sunt numai elevi de 7 ani, respectiv 10 ani. Știind că sunt 100 elevi și că suma vârstelor lor este de 877 ani, să se afle câți elevi sunt în fiecare clasă?

26. Un elev a primit o sumă de 22500 lei numai în bancnote de 500 lei și 1000 lei, în total 37 de bancnote. Câte bancnote de fiecare fel a primit

27. Intr-un bloc sunt 88 de apartamente cu două și, respectiv, trei camere. Câte apartamente cu două camere și câte cu trei camere sunt, dacă numărul camerelor este 198?

28. Un pieton a parcurs distanța, dus și întors, dintre două localități în 9 ore. Știind că viteza la dus a fost de 4km/h, iar la întors de 5km/h, să se afle distanța dintre localități.

29. Suma de 1.000.000 lei s-a depus la bancă, o parte cu dobânda de 30%, iar cealaltă parte cu 40%. Știind că după un an s-a primit o dobândă de 350.000 lei, să se afle ce parte s-a depus cu 30% dobândă anuală și ce parte cu 40%.

30. Un creion costă 125 lei și un caiet 450 lei. Un elev și-a cumpărat 28 de creioane și caiete, plătind 10.000 lei. Câte creioane și câte caiete și-a cumpărat elevul?

31. Dacă într-o sală de clasă așezăm câte 4 elevi într-o bancă, rămâne o bancă liberă, iar dacă așezăm câte 3 elevi, rămân 6 elevi în picioare. Câți elevi și câte bănci sunt în clasă?

32. Pentru un meci de fotbal s-au vândut 16842 bilete de 2000 lei, respectiv 2500 lei biletul, încasându-se în total 36.988.500 lei. Câte bilete de fiecare fel s-au vândut?

33. Cantitatea de grâu aflată într-o magazie trebuie pusă în saci. Dacă în fiecare sac s-ar pune câte 40kg de grâu, atunci în magazie ar rămâne 300 kg de grâu, iar dacă în fiecare sac s-ar pune 50kg de grâu, atunci 6 saci ar rămâne goi. Ce cantitate de grâu se află în magazie și câți saci?

34. Un pahar și o farfurie costă 2200 lei, iar 6 pahare și o farfurie costă 6700 lei. Cât costă un pahar și cât costă o farfurie?

35. Două gramatici și 5 matematici costă 13700 lei, iar trei gramatici și zece matematici costă 25850 lei. Cât costă o gramatică și cât costă o matematică?

36. Florin, Cristina și Florina citesc câte o carte. Dacă Florin ar citi 3 ore, Cristina o oră și Florina 2 ore, atunci toți trei ar citi 152 pagini; dacă Cristina ar citi o oră, Florin 4 ore și Florina o oră, atunci ei ar avea citite

162 pagini; dacă Florina ar citi 3 ore, Florin 5 ore și Cristina o oră, atunci numărul paginilor citite ar fi de 238. Să se afle câte pagini citește fiecare într-o oră.

37. În clasa I, a II-a, a III-a și a IV-a ale unei școli sunt 53 elevi. Dacă în clasa I și a III-a sunt 34 elevi, iar în clasa a II-a, III-a și a IV-a sunt 31 elevi, să se afle câți elevi sunt în fiecare clasă, știind că în clasa a IV-a sunt cu 5 elevi mai puțini decât în clasa a II-a.

38. Într-un grup sunt copii de naționalități română, maghiară și germană. Numai 37 din ei nu sunt români și 51 nu sunt germani. Câți copii de fiecare naționalitate sunt în grup, dacă numărul copiilor de naționalitate maghiară este de două ori mai mic decât al copiilor de naționalitate română?

39. Suma a trei numere naturale este mai mare decât 234 și mai mică decât 242. Să se afle numerele știind că primul dintre ele este de două ori mai mic decât jumătatea celui de al II-lea, iar al III-lea este egal cu dublul sumei primelor două.

40. Suma a trei numere este 100. Dacă împărțim primul la al II-lea obținem câtul 5 și restul 1, iar dacă-l împărțim pe al II-lea la al III-lea obținem câtul 5 și restul 1. Să se afle numerele.

41. Suma a trei numere naturale este 93. Facem următoarele operații:

- a) îl micșorăm pe al treilea număr cu primul și-l dublăm pe primul;
- b) îl micșorăm pe primul număr cu al doilea și-l dublăm pe al doilea;
- c) îl mărim pe primul cu 1 și-l micșorăm pe al doilea cu 1.

După aceste operații obținem trei numere egale având suma egală cu a numerelor inițiale. Să se determine numerele inițiale.

42. Se scriu numerele naturale în ordine, începând cu 1. Să se determine cifra de pe locul 1001.

43. Să se determine al XIII-lea termen al șirului:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

44. Se consideră șirul de fracții:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Al câtelea termen al șirului este fracția $\frac{7}{8}$?

45. Într-o urnă sunt bile albe de 11g fiecare și bile roșii de 12g fiecare, cântărind în total 151g. Care este numărul minim de bile ce trebuie extras din urnă, fără a vedea culoarea, pentru a fi siguri că am extras bile de culori diferite?

46. Este posibil ca folosind o balanță și o masă marcată de 100g să se extragă numai prin două folosiri ale balanței 675g din 3 kg?

47. Un om poate trăi 35.799.753 minute?

48. Un vas de 12l este plin cu apă. Să se pună 4l din acesta într-un vas de 7 l cu ajutorul unui vas de 5l.

49. Avem trei vase în care încap 8l, 5l și 3l. Vasul de 8l este plin cu apă, iar celelalte sunt goale. Cum se poate măsura un litru de apă, folosind numai aceste trei vase ?

50. Completați desenul de mai jos astfel încât suma numerelor din oricare trei căsuțe vecine să fie egal cu 15. Justificare.

	4					6		
--	---	--	--	--	--	---	--	--

51. La un concurs un elev obține pentru 10 răspunsuri 180 de puncte. Să se afle câte răspunsuri au fost corecte și câte greșite, știind că pentru un răspuns corect a obținut 25 de puncte, iar pentru un răspuns greșit a pierdut 10 puncte.

52. Un camion la urcarea unei pante are viteza de 12 km/h și la coborârea aceleiași pante are viteza de 40 km/h. Știind că drumul de urcare și coborâre a durat în total 6 ore 30 min, să se afle lungimea drumului parcurs.

53. 67 camioane transportă 679 t de marfă, unele cu capacitatea de 10 t, altele de 7,2 t și altele de 15, (6) t. Câte camioane sunt de fiecare fel?

54. Determinați vârsta lui Alexandru și a tatălui său știind că în urmă cu 4 ani vârsta tatălui era de 6 ori mai mare decât vârsta fiului, iar peste 5 ani vârsta lui Alexandru va fi de 3 ori mai mică decât vârsta tatălui său.

55. Numărul elevilor din ciclul gimnazial de la Colegiul Național "Andrei Mureșanu" din Dej reprezintă $\frac{1}{6}$ din numărul elevilor de la ciclul liceal. Să se afle numărul elevilor din fiecare ciclu știind că dacă numărul elevilor